UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

CALCUL D'UN POINT D'EQUILIBRE AVEC DES VARIANTES DE L'ALGORITHME DE FRANK ET WOLFE DANS LE CAS DES COUTS NON SYMETRIQUES

Clermont Dupuis

et

Sang Nguyen

Cette étude a été effectuée grâce à une subvention du
Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie, Canada

Ce rapport a été publié grâce à une subvention du
Fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #274
Novembre 1982

Dépôt légal - 3e trimestre 1984

RÉSUMÉ

Lorsque l'on est en présence de plusieurs catégories d'usagers de plusieurs modes de transport, ou lorsque le coût de transport sur chaque lien du réseau dépend aussi des flots de liens adjacents, Smith a montré que la recherche d'un trafic d'équilibre x* revient à la résolution de l'inégalité variationnelle:

$$(Cx^*, x-x^*) \geq 0 \qquad \text{pour tout trafic } x.$$

De plus, sous des conditions de continuité et de monotonie de Cx, Glowinski *et al.* et Auslender ont démontré l'équivalence de l'inégalité de Smith avec l'inégalité complémentaire suivante:

$$(Cx, x-x^*) \geq 0 \qquad \text{pour tout trafic } x.$$

Nous analysons ici le comportement de différentes variantes de l'algorithme de Frank et Wolfe dans le cas de coûts non-symétriques. Cette étude est basée sur les deux formulations précédentes d'un problème d'équilibre.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

1. Notation et description du problème 2

2. Une approche basée sur une nouvelle formulation du flot d'équilibre 3

   2.1 Recherche d'un flot d'équilibre à l'aide de ces nouvelles formulations 7

3. Variantes basées sur la méthode de gradient conditionnel de S.I. Zuhovitskii *et al.* 14

4. Parallèle avec l'algorithme de Frank et Wolfe 21

   4.1 Discussion sur la convergence de l'algorithme de Frank et Wolfe 25

Conclusion 27

Références 28

INTRODUCTION

Le problème qui nous concerne est l'affectation du trafic routier suivant un modèle d'équilibre. Pour simplifier l'exposé, nous nous restreignons au cas simple d'un seul mode de transport, d'une seule catégorie de flot et de la demande de flot constante. Le coût de transport sur chaque arc est une fonction des flots des arcs du réseau entier; aucune hypothèse de symétrie n'est imposée.

On a un trafic d'équilibre lorsque toutes les routes utilisées entre deux zones quelconques ont le même coût de parcours, tandis que les routes non utilisées ont des coûts de parcours plus élevés (équilibre de Wardrop, 1952).

Lorsque les coûts de transport sont monotones et "symétriques", le calcul d'un flot d'équilibre se ramène à la résolution d'un problème convexe (Beckmann *et al.*, 1956). De nombreux algorithmes de résolution relativement efficaces ont été élaborés (Nguyen, 1976; LeBlanc *et al.*, 1975) pour cette sous-classe de fonctions de coût. De même, plusieurs améliorations aux algorithmes existants ont été apportées ces dernières années (Florian, 1977, Shaigetz, 1978).

En général, l'équilibre de Wardrop peut être décrit mathématiquement, soit par une inégalité variationnelle (Smith, 1979), soit par un système de complémentarité non-linéaire (Aashtiani et Magnanti, 1980), soit par un système d'équations non-linéaires (Fisk et Nguyen, 1980), ou soit par une inégalité variationnelle complémentaire (Nguyen et Dupuis, 1981).

Le calcul du flot d'équilibre dans ce cas est beaucoup plus difficile. Les hypothèses assurant la convergence des méthodes élaborées sont très restrictives et difficiles à vérifier; de plus, chaque itération de ces algorithmes demande une quantité de calcul souvent très imposante.

Nous analysons dans ce document le comportement de différentes variantes des méthodes de directions réalisables appliquées au problème général de la recherche d'un trafic d'équilibre.

Premièrement, nous considérons une nouvelle formulation du problème d'équilibre à laquelle nous appliquons des schémas de calcul simples. Puis, on examine la méthode de gradient conditionnelle de Zuhovickii *et al.* [1], l'algorithme de Frank et Wolfe et plusieurs variantes connexes.

1. Notation et description du problème

On se donne un réseau de transport G formé de N sommets et M arcs. On distingue P paires origine-destination (O/D) et l'on dénote par d_p la demande de flot entre la pième paire O/D. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots x_M)$ le vecteur de flot où x_i est le flot sur l'arc i. $x \geq 0$ est un flot réalisable s'il satisfait les équations de conservation de flots habituelles. On dénotera $\Omega \subset R^M$ l'ensemble des flots réalisables, on suppose Ω borné et non vide (d_p fini, $p = 1,2,\ldots$ et il existe au moins un chemin reliant la pième paire O/D). A chaque arc i du réseau est associé un coût de transport $c_i(x)$ fonction continue à valeurs réelles définie sur Ω. On désigne par Cx la fonctionnelle $(c_1(x), c_2(x), \ldots, c_M(x))$; $C : R^M \to R^M$.

Un flot $x^* \in \Omega$ est un flot d'équilibre si et seulement si pour toute paire O/D, aucun chemin ne peut avoir un coût de transport strictement inférieur à celui d'un chemin portant un flot positif. D'après Smith (1979), x^* est un flot d'équilibre si et seulement si

$$x^* \in \Omega, \quad (Cx^*, x-x^*) \qquad \forall \ x \in \Omega \qquad (1.1)$$

où $(,)$ est le produit scalaire ordinaire dans R^M.

Ω étant un convexe non-vide, l'existence de x^* est assurée par la continuité de Cx, alors que l'unicité de x^* demande que l'on suppose en plus que Cx soit strictement monotone sur Ω, c'est-à-dire:

$$(Cx-Cy,\ x-y) > 0 \qquad \forall \ x \neq y \in \Omega \qquad (1.2)$$

(Smith, 1979; Dafermos, 1980).

La relation (1.1) peut aussi s'écrire:

$$\text{"}x^* \in \Omega\text{, solution du problème } \min_{x \in \Omega} \max_{y \in \Omega} (Cx, x-y)\text{"}. \qquad (1.3)$$

Notre travail portera sur la formulation (1.3) et son dual $\max_{x \in \Omega} \min_{y \in \Omega} (Cy, y-x)$ (Nguyen et Dupuis, 1981).

2. Une approche basée sur une nouvelle formulation du flot d'équilibre

Nous supposons dans ce qui suit que Cx est continue, monotone sur l'ensemble Ω convexe, compact et non-vide. Ceci nous assure l'existence d'un flot d'équilibre $x^* \in \Omega$ et le bien-fondé de l'inégalité variationnelle complémentaire à celle de Smith (Glowinski *et al.*, 1976 ou Auslender, 1976,

ou Nguyen et Dupuis, 1981) comme formulation du problème d'équilibre:

$$x^* \in \Omega, \quad (Cx, x-x^*) \geq 0 \qquad \forall \; x \in \Omega \tag{2.1}$$

La relation (2.1) peut s'écrire encore:

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \qquad \text{où } f(x) = \max_{y \in \Omega} (Cy, x-y) \tag{2.2}$$

est convexe sur Ω.

La difficulté qui intervient dans la résolution de (2.2) réside dans le calcul de f(x). En effet, nous savons (Luenberger, 19 , p.110) que:

"si $\bar{y}$ est un minimum local de $(Cy, y-\bar{x})$ sur Ω où $\bar{x} \in \Omega$ est fixé, et Cy est différentiable sur l'ensemble Ω, alors

$$(\tilde{C}\bar{y}, y-\bar{y}) \geq 0 \qquad \forall \; y \in \Omega \,, \tag{2.3}$$

où $\tilde{C}y = Cy + J_C(y)^t(y-\bar{x})$, $J_C(y)$ désignant le Jacobien de C au point y."

La relation (2.3) correspond à la recherche d'un point d'équilibre où l'on considère les coûts marginaux $\tilde{C}y$. Dans le cas où Cy est différentiable deux fois, $J_{\tilde{C}}(y)$ (le Jacobien de $\tilde{C}$ au point y) est symétrique (Luenberger, 19 , p. 330). Par conséquent, (2.3) est un problème d'équilibre avec des coûts de transport "symétriques".

De plus, lorsque Cy est strictement monotone sur Ω, une condition suffisante pour la stricte monotonie de $\tilde{C}y$ sur Ω est la monotonie de $J_C(y)^t(y-\bar{x})$ sur Ω. On peut vérifier que cette dernière condition est satisfaite lorsque Cx est affine. Ainsi, dans le cas affine, f(x) est différentiable sur Ω où $\bar{y}$ est l'unique minimum de $(Cy, y-\bar{x})$ sur Ω. Ce point $\bar{y}$

est aussi l'unique solution d'équilibre du problème (2.3) où les fonctions de coût $\tilde{C}y$ sont "symétriques" et strictement monotones.

D'où l'évaluation de f à un point x donné est tout aussi difficile que de rechercher le flot d'équilibre x*. Pour tenter de remédier à cette situation, nous allons considérer une nouvelle formulation pour le problème d'équilibre.

Proposition 2.1

x* est un flot d'équilibre $\Longleftrightarrow$ $0 \in T(x^*)$

$$\text{où} \quad T(x) = \left\{ \max_{y \in [x, u_x]} (Cy, x-y) \,|\, u_x \text{ est un plus court chemin associé à } Cx. \right\} ,$$

$$[x, u_x] = \{x + \lambda(u_x - x) \,|\, \lambda \in [0,1]\}. \tag{2.4}$$

Preuve: Remarquons que $\forall\, x \in \Omega$, $w \in T(x) \Rightarrow w \geq 0$.

De plus, $T(x^*) = \{0\}$ d'après (2.1).

Par conséquent,

$$x^* \text{ est un flot d'équilibre} \Rightarrow 0 \in T(x^*).$$

Supposons maintenant que $0 \in T(\bar{x})$ pour un point réalisable $\bar{x}$ donné. Cela implique qu'il existe un plus court chemin $u_{\bar{x}}$ associé à $C\bar{x}$ tel que

$$\max_{y \in [\bar{x}, u_{\bar{x}}]} [(Cy, \bar{x}-y)] = 0 . \tag{2.5}$$

Mais, (2.5) peut s'écrire encore:

$$\max_{\lambda \in [0,1]} \lambda \, [(C(\bar{x} + \lambda(u_{\bar{x}} - \bar{x})), \bar{x} - u_{\bar{x}})] . \tag{2.6}$$

Or, $[(C(\bar{x}+\lambda(u_{\bar{x}}-\bar{x})), \bar{x}-u_{\bar{x}})]$ est une fonction continue, décroissante de λ dans $[0,1]$. De (2.6), on obtient alors:

$$(C\bar{x}, \bar{x}-u_{\bar{x}}) = 0,$$

c'est-à-dire, $(C\bar{x}, \bar{x}-y) \leq 0 \qquad \forall\ y \in \Omega.$

D'après l'inégalité variationnelle de Smith (1979), nous concluons que $\bar{x}$ est un flot d'équilibre. □

Remarquons que pour chaque élément $w(x) \in T(x)$, nous avons:

$$0 \leq w(x) \leq f(x) \qquad \forall\ x \in \Omega.$$

Supposons maintenant que u_x est déterminé uniquement par un algorithme de plus court chemin. Nous avons alors le corollaire suivant:

Coroliaire 2.1

x^* est un flot d'équilibre $\Longleftrightarrow$ x^* est une solution du problème $\min_{x \in \Omega} F(x)$

où $F(x) = \max_{y \in [x, u_x]} [Cy, x-y]$, u_x étant déterminé de façon unique.

On voit facilement que $0 \leq F(x) \leq f(x) \quad \forall\ x \in \Omega$, $F(x^*) = f(x^*) = 0$. Malheureusement, $F(x)$ n'est ni continue, ni différentiable, ni convexe. Il ne semble donc pas aisé de construire une méthode de calcul basée sur la formulation (2.7).

Dans la prochaine section, nous allons examiner deux schémas de calcul basés sur l'approche de Frank et Wolfe [2] pour résoudre le problème (2.7).

2.1 Recherche d'un flot d'équilibre à l'aide de ces nouvelles formulations

Considérons la formulation (2.7) précédente afin de construire heuristiquement la suite $\{x^k\}$ suivante:

Schéma 2.1.1

Etape 0. Soit $x^0 \in \Omega$ un point quelconque initial,

poser $k \leftarrow 0$.

Etape 1. Calculer un plus court chemin u_{x^k} associé au vecteur de coût Cx^k. Résoudre le problème

$$\underset{y \in \{(x^k+\lambda(u_{x^k}-x^k)) \mid \lambda \in [0,1]\}}{\text{Max}} (Cy, x^k-y) \quad . \tag{2.8}$$

Soit y^k une solution optimale de (2.8).

Etape 2. Calculer un plus court chemin z^k associé aux coûts Cy^k.

Etape 3. Calculer

$$x^{k+1} = x^k + \theta^k(z^k-x^k),$$

où $\theta^k = \arg \underset{\theta \in [0,1]}{\text{Min}} F(x^k+\theta(z^k-x^k))$

Poser $k \leftarrow k+1$, aller à l'étape 1.

Le calcul du pas à l'étape 3 n'a pas besoin d'être exact. Une diminution stricte de F est suffisante.

Malheureusment, cette suite $\{x^k\}$ ne converge pas vers un flot d'équilibre. Pour nous en convaincre, considérons l'exemple de Dafermos [15]. Soit le réseau suivant composé de cinq arcs dénotés a_1, a_2, a_3, b_1 et b_2:

(2.9)

Les demandes de voyage sont: $d_{xy} = 210$, $d_{yx} = 120$, tandis que les fonctions de coûts sont: $c_{a_1} = 10x_{a_1} + 5x_{b_1} + 1000$

$$c_{a_2} = 15x_{a_2} + 5x_{b_2} + 950$$

$$c_{a_3} = 20x_{a_3} + 3000$$

$$c_{b_1} = 20x_{b_1} + 2x_{a_1} + 1000$$

$$c_{b_2} = 25x_{b_2} + x_{a_2} + 1300.$$

En utilisant la notation du schéma de calcul 2.1.1, on obtient:

$x^0 = (70,70,70,60,60)$

$Cx^0 = (2000,2300,4400,2340,2870)$

$u_{x^0} = (210,0,0,120,0)$ unique

$Cy^0 = (2308.025603, 2055.391433, 4146.331856, 2608.163466, 2598.212703)$

$z^0 = (0,210,0,0,120)$ unique

$\theta^0 = 0$

Par contre, pour obtenir une "bonne"solution de départ, cette approche pourrait donner des résultats satisfaisants. Dans l'exemple de Dafermos, en choisissant plutôt $x^0 = (210,0,0,120,0)$ comme point réalisable de départ, nous avons obtenu:

$x' = x^* =$ le flot d'équilibre, si le pas θ^0 est calculé exactement sinon, lorsque le pas à l'étape 3 est calculé à deux décimales près, on obtient:

$F(x^0) = 94,284.184568,$

$F(x') = 19.247889,$

$F(x^2) = 5.036804,$

$x^3 = x^2, \ldots$

Ces deux exemples démontrent bien que le point z^k à l'étape 3 est inapproprié. Tentons d'améliorer cette situation en remplaçant z^k par u_{x^k} à l'étape 3 du schéma 2.1.1. Puisque $(Cy^k, u_{x^k}-x^k) < 0 \quad \forall\, x^k \neq x^*$, la direction réalisable $(u_{x^k}-x^k)$ à l'étape 3, semble a priori un choix judicieux.

Voici en détail le schéma de calcul en question.

Schéma 2.1.2

Etape 0. Soit $x^0 \in \Omega$ un point quelconque initial,

poser $k \leftarrow 0$.

Etape 1. Poser $x^{k+1} = x^k + \theta^k(u_{x^k}-x^k)$, où $\theta^k = \arg \underset{\theta \in [0,1]}{\text{Min}} F(x^k+\theta(u_{x^k}-x^k))$,

$F(x)$ est définie en (2.7).

Poser $k \leftarrow k+1$, aller à l'étape 1.

D'après nos expériences de calcul, à l'itération k, lorsque le point u_{x^k} n'est pas unique, le choix du plus court chemin associé au vecteur de coûts Cx^k ne doit pas être fait impunément. Nous avons sélectionné le point u_{x^k} de sorte que $\{F(x^k)\}$ soit strictement décroissante.

Reprenons l'exemple de Dafermos. Nous obtenons:

a) x^0 (70,70,70,60,60)

$F(x^0) = 20003.545052$

$F(x^1) = 6155.585502$

$F(x^2) = 3817.860681$

$F(x^3) = 3140.401485$

$F(x^4) = 2563.829730$

$F(x^5) = 2375.448056$

$F(x^6) = 2182.427444$

$F(x^7) = 2116.582717$

$F(x^8) = 2044.058303$

etc. ,

le calcul de θ^k a été effectué à cinq décimales près.

b) Calcul exact de θ^k :

$x^0 = (210,0,0,120,0)$

$x^1 = x^*$.

Nous considérons maintenant le réseau de la figure I. La matrice de demande et la fonction de coût sont représentées aux tableaux I et II. Nous obtenons alors:

$F(x^0) = 36\ 840,55500$	$GAP(x^0) = 176\ 492,00000$
$F(x^1) = 1\ 770,86550$	$GAP(x^1) = 13\ 918,93402$
$F(x^2) = 253,77213$	$GAP(x^2) = 10\ 384,50428$
$F(x^3) = 50,46244$	$GAP(x^3) = 5\ 264,24380$

où $GAP(x) = \max_{y \in \Omega} (Cx, x-y)$ et θ^k a été calculé à cinq décimales près.

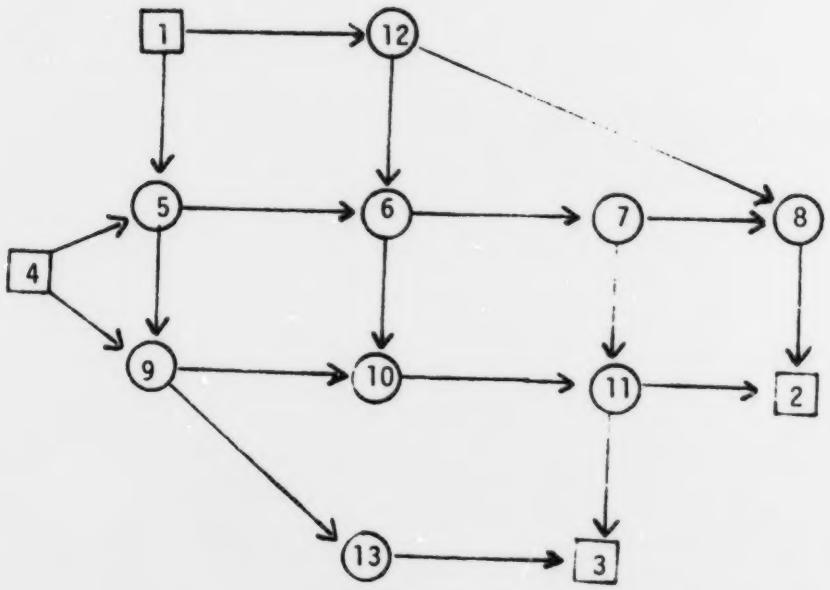


Figure 1 - Réseau utilisé

$[d_{pq}]$ =

	2	3
1	400	800
4	600	200

Tableau 1

Matrice de demande

$$A = \begin{bmatrix}
18. & 10. & 5. & & 1. & 1.2 & & & & & & & & & & & & & & \\
1. & 18. & & & & & & & & & & & & & & & & & .2 & .1 \\
2. & & 15. & 9. & 2. & 1.1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 5. & 11. & & 2. & & & & & & .3 & .1 & & & & & & & \\
3. & & 2. & & 13.5 & 6. & .4 & 1. & & & & & & & & & & & 1. & \\
2. & & 1. & .9 & 2. & 17.5 & & & & & & .4 & .2 & & & & & & & \\
 & & & & .6 & & 12.5 & .1 & 4. & 4.4 & & & & & & & & & .3 & \\
 & & & & .5 & & 2. & 5.5 & & & & 1.1 & & .1 & & & & & .4 & \\
 & & & & & & .5 & & 13.5 & 1. & .6 & & & & & & & & & 5. \\
 & & & & & & .2 & & 5. & 33.3 & & & & 2. & 13. & 12. & & & & \\
 & & & & & & & & .2 & & 12.5 & & & & 3. & & & & 2. & \\
 & & & .5 & & 4. & & 2. & & & & 9.8 & 2. & .3 & & & & & & \\
 & & & .1 & & 2. & & & & & & 1. & 5. & & & & & & & 1. \\
 & & & & & & & .3 & & 10. & & 3. & & 37. & .1 & 14. & & & & \\
 & & & & & & & & & .1 & 11. & & & .2 & 20. & & .5 & & & \\
 & & & & & & & & & .2 & & & & .1 & 2. & 50. & & & & 6. \\
 & 4. & & & 3. & & .3 & 2. & & & & & & & & & & 20. & 1. & \\
 & 4. & & & & & & & 4. & & .3 & & & & & & & 2. & 11. & \\
 & & & & & & & & & & & & 2. & & & 5. & & & & 10.
\end{bmatrix}$$

$$Cx = 10^{-3} Ax + b$$

vecteur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b^t =	7	9	9	12	3	9	5	13	5	9	9	10	9	6	9	8	7	14	11

Tableau II - Description des coûts non-symétriques
Diagonale dominante

3. Variantes basées sur la méthode de gradient conditionnel de S.I.Zukhovitskii *et al.* [1]

Les deux algorithmes que nous allons voir ont été examinés par S.I.Zukhovitskii, R.A. Poliak et M.E. Primak [1]. Ils sont basés sur la méthode de gradient conditionnel [2].

Schéma 3.1

Etape 0. Soit $x^0 \in \Omega$ un point quelconque initial,

posons $k \leftarrow 0$.

Etape 1. Résoudre $\bar{\lambda}^k = \arg \underset{\lambda \in [0,1]}{\text{Min}} \underset{u \in \Omega}{\text{Max}} [C(x(\lambda)), x(\lambda)-u]$ (3.1)

où $x(\lambda) = x^k + \lambda(u_{x^k} - x^k)$, u_{x^k} est un p.c.c. associé à Cx^k.

Posons $x^{k+1} = x(\bar{\lambda}^k)$, $k \leftarrow k+1$ et aller à l'étape 1.

S.I. Zukhovitskii *et al.* [1] démontrent la convergence du schéma 3.1 en supposant que Cx est différentiable sur Ω, le Jacobien de $Cx(J_C(x))$ est semi-défini positif $\forall\, x \in \Omega$ et Ω est strictement convexe. En effet, lorsque ces conditions sont vérifiées, la fonction $x \mapsto \underset{u \in \Omega}{\text{Max}} [Cx, x-u]$ est différentiable sur Ω et par conséquent, les résultats de convergence en découlent aisément.

Toutefois, dans notre problème, Ω est seulement un ensemble convexe, non-strictement convexe de sorte que les résultats de [1] ne s'appliquent pas. En posant $GAP(x) = \underset{u \in \Omega}{\text{Max}} [Cx, x-u]$, on voit facilement que

$$0 \leq GAP(x^{k+1}) \leq GAP(x^k) \qquad \forall\, k, \quad GAP(x^*) = 0 \Longleftrightarrow x^* \text{ est}$$

un flot d'équilibre, mais l'inégalité $GAP(x^{k+1}) \leq GAP(x^k)$ n'est pas

nécessairement stricte.

Examinons l'exemple suivant où le schéma 3.1 ne converge pas.

Soit

(3.2)

un réseau composé de trois arcs a_1, a_2 et a_3; une demande de six unités; les fonctions de coût suivantes: $c_{a_1}(x) = 2x_{a_1} + x_{a_2}$, $c_{a_2}(x) = x_{a_1} + 4x_{a_2}$, $c_{a_3}(x) = x_{a_2} \quad x_{a_3}$; le flot d'équilibre est $x^* = (3,1,2)$; les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ sont $3,3+\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$.

Considérons le point $x^0 = (18/7, \frac{12}{7}, \frac{12}{7})$, $GAP(x^0) = \frac{216}{49} \simeq 4,41$, nous avons deux choix possibles pour u_{x^0} extrémal:

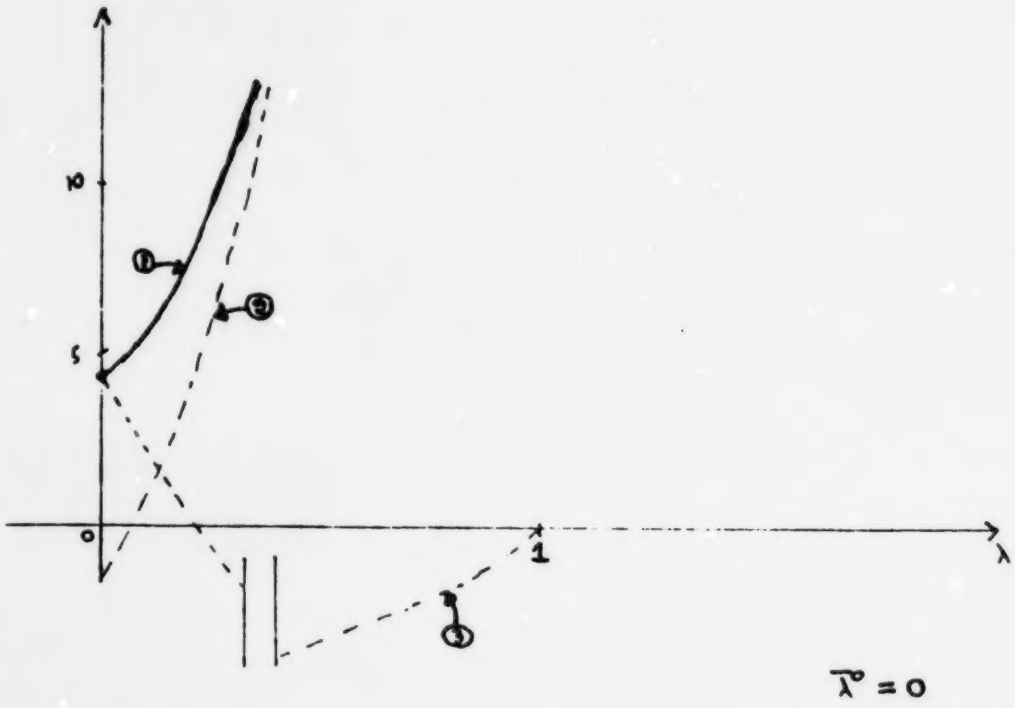
<u>1er cas</u>: $u_{x^0} = (0,0,6)$

$$x(\lambda) = x^0 + \lambda(u_{x^0} - x^0)$$

$$x(\lambda) = (\frac{18}{7} - \frac{18\lambda}{7}, \frac{12}{7} - \frac{12\lambda}{7}, \frac{12}{7} + \frac{30\lambda}{7})$$

$$c(x(\lambda)) = (\frac{48}{7} - \frac{48\lambda}{7}, \frac{66}{7} - \frac{66\lambda}{7}, \frac{48}{7} + \frac{78\lambda}{7})$$

$$(3.1) = \min_{\lambda \in [0,1]} \max\{\underbrace{\frac{36}{49}[111\lambda^2+30\lambda+6]}_{(1)}, \underbrace{\frac{36}{49}[111\lambda^2+51\lambda-15]}_{(2)}, \underbrace{\frac{36}{49}[111\lambda^2-117\lambda+6]}_{(3)}\}$$



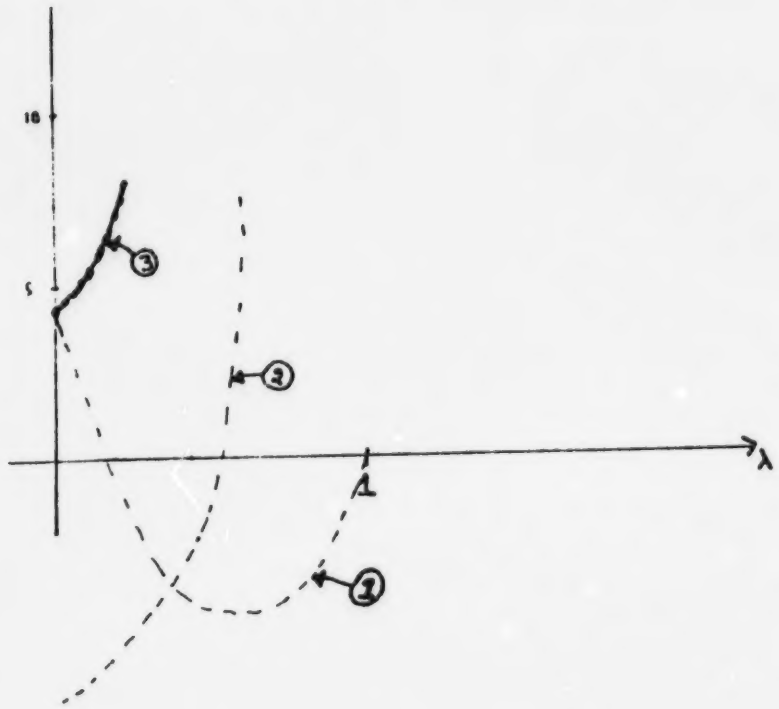
$\bar{\lambda}^{\circ} = 0$

2e cas: $u_{x^0} = (6,0,0)$

$$x(\lambda) = \left(\frac{18}{7} + \frac{24\lambda}{7},\ \frac{12}{7} - \frac{12\lambda}{7},\ \frac{12}{7} - \frac{12\lambda}{7}\right)$$

$$c(x(\lambda)) = \left(\frac{48}{7} + \frac{36\lambda}{7},\ \frac{66}{7} - \frac{24\lambda}{7},\ \frac{48}{7} - \frac{48\lambda}{7}\right)$$

$$(3.1) \equiv \min_{\lambda \in [0,1]} \max \left\{ \underbrace{\frac{36}{49}\left[48\lambda^2 - 54\lambda + 6\right]}_{(1)},\ \underbrace{\frac{36}{49}\left[48\lambda^2 + 16\lambda - 15\right]}_{(2)},\ \underbrace{\frac{36}{49}\left[48\lambda^2 + 44\lambda + 6\right]}_{(3)} \right\}$$



$\bar{\lambda}^0 = 0$

Soit $M(x^0) = \{(6-6\varepsilon, 0, 6\varepsilon) | \varepsilon \in [0,1]\}$ = l'ensemble des plus courts chemins associés à Cx^0, on peut vérifier qu'aucun élément de $M(x^0)$ ne peut jouer le rôle de u_{x^0} à l'étape 1 tout en s'assurant une décroissance stricte du GAP.

Donc, $\bar{\lambda}^0 = 0$ et le schéma 3.1 ne converge pas dans ce cas. Rien ne nous laisse croire que des directions différentes de $(u_{x^k} - x^k)$ puissent faire l'affaire.

Nous allons maintement nous intéresser à un schéma de calcul similaire à celui de (3.1) mais où le pas est fixé a priori.

Schéma 3.2

Etape 0. Soit $x^0 \in \Omega$ un point quelconque initial,

posons $k \leftarrow 0$.

Etape 1. Résoudre un problème de plus courts chemins associé aux coûts Cx^k, soit u_{x^k} un tel chemin,

$$x^{k+1} = x^k + t_k(u_{x^k} - x^k), \quad \text{où} \quad 0 < t_k \leq 1, \; t_k \to 0, \; \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty.$$

$k \leftarrow k+1$.

S.I. Zukhovitskii *et al.* [1] imposent les mêmes hypothèses que précédemment pour s'assurer un résultat de convergence. Par contre, Polyak [22] et C. Fisk [23] mentionnent que le taux de convergence expérimental est lent.

Nous allons construire un contre-exemple pour le problème de la recherche d'un flot d'équilibre pour le cas où la condition $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$ n'est pas satisfaite. Reprenons l'exemple précédent (3.2).

Soit $t_0 = \frac{1}{8}$, $t_k = \frac{1}{2} t_{k-1} \quad \forall\, k > 0$,

$x^0 = (6,0,0)$, $Cx^0 = (12,6,0)$, $u_{x^0} = (0,0,6)$.

Nous avons alors

$$u_{x^0 + \lambda(u_{x^0} - x^0)} = u_{x^0} \qquad \forall\, \lambda \in [0, \tfrac{1}{4}] \ ,$$

$$x^k = x^0 + \alpha_k(u_{x^0} - x^0) \quad \text{où} \quad \alpha_k = t_{k-1} + t_k - t_k t_{k-1} \ , \ k > 0$$

$$\leq \frac{23}{128} \simeq 0.18$$

d'où, $\alpha_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $x^k \underset{k\to\infty}{\to} x^0$ et le processus ne converge pas.

Par contre, lorsque la condition $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$ est satisfaite, il a été impossible de trouver un contre-exemple.

Examinons maintenant les deux problèmes MIN-MAX et MAX-MIN du problème de la recherche d'un flot d'équilibre pour se convaincre intuitivement de l'existence d'un tel contre-exemple.

Soit le problème (3.3),

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = \max_{y \in \Omega} (Cx, x-y) \ , \tag{3.3}$$

f n'est ni convexe, ni différentiable partout, en général. Une condition nécessaire (et suffisante lorsque f est convexe sur Ω) d'optimalité est donnée par K.C. Kapur [20] :

$$D_\nu f(x^*) \geq 0 \quad \text{pour toute direction admissible } \nu \ ,$$

où $D_\nu f(x^*)$ est la dérivée directionnelle de f(x) à $x^* \in \Omega$ dans la direction ν, $\|\nu\| = 1$. Nous avons: $D_\nu f(x) = \max_{y \in \Omega(x)} \nu^t (Cx + J_C(x)^t (x-y))$

où $\Omega(x) = \{y \in \Omega \mid f(x) = (Cx, x-y)\}$. En général, $\Omega(x)$ possède plus d'un élément. Malheureusement, $d = (u_x - x)$ n'est pas nécessairement une direction de descente de f à x (u_x est un plus court chemin associé à Cx) même si nous avons la relation $(Cx + J_C(x)^t (x-u_x), u_x - x) < 0$ lorsque $x \neq x^*$, c'est-à-dire $w^t (u_x - x) < 0$ où $w = Cx + J_C(x)^t (x-u_x) \in \partial f(x)$, le sous-différentiel de f à x lorsque f est convexe.

L'exemple (3.2) examine une telle situation.

Par conséquent, les résultats de B. Powell et Y. Scheffi [21] ne s'appliquent pas ici.

Considérons maintenant le problème dual (2.2):

$$\min_{x\in\Omega} g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \max_{y\in\Omega} (Cy, x-y) \quad \text{est convexe sur } \Omega.$$

On suppose g différentiable sur Ω.

Soit y_x le maximum de $(Cy, x-y)$ sur Ω, u_{y_x} un plus court chemin associé à C_{y_x}, alors $(u_{y_x} - y_x)$ est une direction de descente de g à x. On peut alors définir le processus itératif suivant:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k (u_{y_{x^k}} - y_{x^k}), \text{ où } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \alpha_k \to 0. \qquad (3.4)$$

Ce schéma de calcul a été démontré convergeant par B. Powell et Y.Sheffi [21]. Toutefois, le calcul de y_x étant impossible de façon exacte, la première approximation qui nous vient à l'idée est de remplacer y_x et $u_{y_{x^k}}$ par x^k et u_{x^k} respectivement, ce qui donne le schéma (3.2). Pour vérifier le bien-fondé de cette approximation à partir des résultats de [21], il s'agit de montrer que $(u_{x^k} - x^k)$ est une direction de descente de g au point x^k, c'est-à-dire:

$$(Cy_{x^k}, u_{x^k} - x^k) < 0 \quad \text{ce qui n'est pas nécessairement le cas.}$$

Nous pouvons considérer de "meilleures" approximations de y_{x^k} que le point x^k. Cela nous amène à construire différentes heuristiques basées sur le schéma de calcul (3.2)

4. Parallèle avec l'algorithme de Frank et Wolfe

Un algorithme du type des méthodes d'accumulation de contraintes a déjà été proposé pour déterminer un flot d'équilibre (Nguyen et Dupuis, 1981). Examinons le cas où, de façon inconditionnelle, seule la dernière contrainte est conservée.

Nous allons considérer trois schémas de calcul A, B et C, dépendant de la façon de calculer le pas à chaque étape.

Etape 0. Soit $x^0 \in \Omega$, $k \leftarrow 0$.

Etape 1. Déterminer u_{x^k} un plus court chemin associé à Cx^k.

Etape 2. Calcul de θ^k

A) $\theta^k = \arg \underset{\theta \in [0,1]}{\text{Min}} \; [(C(x^k+\theta(u_{x^k}-x^k)),\, x^k-u_{x^k})]^2$

B) $\theta^k = \arg \underset{\theta \in [0,1]}{\text{Min}} \; [(C(x^k+\theta(u_{x^k}-x^k)),\, x^k+\theta(u_{x^k}-x^k)-u_{x^k})]$

C) $\theta^k = 1$.

Etape 3. $x^{k+1} = \theta^k(u_{x^k}-x^k) + x^k$,

$k \leftarrow k+1$

aller à l'étape 1

D'abord, on peut rejeter immédiatement le schéma C pour des raisons évidentes. Examinons donc les schémas A et B selon deux classes différentes:

Coûts de transport symétriques:

Dans ce cas, la recherche d'un flot d'équilibre se ramène à la résolution du problème convexe de Beckmann

$$\underset{x\in\Omega}{\text{Min}} \sum_a \int_0^{x_a} c_a(z)\, dz \qquad (4.1)$$

où la méthode de Frank et Wolfe appliquée à (4.1) coïncide avec le schéma A. Pour ce qui est du schéma B, nous avons le contre-exemple suivant:

la solution d'équilibre est $(x^*,y^*) = (1,2)$.

$x^0 = (0,4)$, $Cx^0 = (0,4)$, $u_{x^0} = (4,0)$, $\theta^0 = 2/3$

$x^1 = (8/3, 4/3)$, $Cx^1 = (16/3, 4/3)$, $u_{x^1} = (0,4)$, $\theta^1 = 3/4$

$x^2 = (2/3, 10/3)$, $Cx^2 = (4/3, 10/3)$, $u_{x^2} = (4,0)$ $\theta^2 = 3/4$

$x^3 = (8/3, 4/3)$.

Coûts de transport asymétriques:

Considérons le contre-exemple suivant pour le schéma B:

soit

la solution d'équilibre est $(\frac{10}{3}, 8/3)$.

$x^0 = (1,5)$, $Cx^0 = (13,16)$, $u_{x^0} = (6,0)$, $\theta^0 = 3/5$

$x^1 = (4,2)$, $Cx^1 = (16,10)$, $u_{x^1} = (0,6)$, $\theta^1 = 3/4$

$x^2 = (1,5)$.

Pour ce qui est du schéma A, un contre-exemple a été donné par T.L. Magnanti [3] dans le cas de fonctions de coûts strictement monotones:

$$Cx = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad x + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = Mx + q$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}[1 \pm \sqrt{3}i]$. Puisque M est définie positive si et seulement si la matrice symétrique $M+M^t$ est définie positive, ce qui est vrai si le déterminant de chacun de ses mineurs principaux est positif. Puisque ces déterminants valent respectivement 8, 39 et 162, M est définie positive et alors Cx est strictement monotone.

$x^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ est l'unique solution d'équilibre.

Soit $x^0 = (1,0,0)$, $Cx^0 = (1,-2,1)$, $u_{x^0} = (0,1,0)$, $\theta^0 = 1$

$x^1 = (0,1,0)$ $Cx^1 = (1,1,-2)$, $u_{x^1} = (0,0,1)$, $\theta^1 = 1$

$x^2 = (0,0,1)$, $Cx^2 = (-2,1,1)$, $u_{x^2} = (1,0,0)$, $\theta^2 = 1$

$x^3 = (1,0,0)$.

Remarquons que $|\lambda_2| = \frac{3}{2}\sqrt{1+3} = 3 > 1$; toutefois, nous pouvons construire un contre-exemple où ceci n'est pas vérifié. En effet, soit $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, choisissons

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2-\varepsilon & 2-\varepsilon & 1 \\ 1 & 2-\varepsilon & 2-\varepsilon \\ 2-\varepsilon & 1 & 2-\varepsilon \end{pmatrix} \quad , \quad q_\varepsilon = q.$$

Les déterminants des mineurs principaux de la matrice $M_\varepsilon+M_\varepsilon^T$ sont $4-2\varepsilon$, $7-10\varepsilon+3\varepsilon^2$ et $(4-2\varepsilon)^3+2(3-\varepsilon)^3-3(3-\varepsilon)^2(4-2\varepsilon)\simeq 10$. Par conséquent, $Cx = M_\varepsilon x + q_\varepsilon$ est strictement monotone et le cycle précédent est encore présent. Cependant, les valeurs propres de M_ε sont $5-2\varepsilon, (\frac{1-\varepsilon}{2})(1\pm\sqrt{3}i)$. Or, on a $|(\frac{1-\varepsilon}{2})(1\pm\sqrt{3}i)| = 1-\varepsilon < 1$.

De plus, Magnanti [3] affirme qu'il serait intéressant de construire un exemple comme ceux qui précèdent où $Cx \geq 0 \quad \forall\, x\in\Omega$.
En voici un!

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, les mineurs principaux de $M+M^T$ sont 16, 112 et 640.

On obtient le cycle suivant:

$x^0 = (1,0,0)$, $Cx^0 = (5,1,5)$, $u_{x^0} = (0,1,0)$, $\theta^0 = 1$
$x^1 = (0,1,0)$, $Cx^1 = (5,5,1)$, $u_{x^1} = (0,0,1)$, $\theta^1 = 1$
$x^2 = (0,0,1)$, $Cx^2 = (1,5,5)$, $u_{x^2} = (1,0,0)$, $\theta^2 = 1$
$x^3 = (1,0,0)$.

Avec regret, nous n'avons pu trouver un cas où q possède uniquement des éléments positifs.

Dans un rapport ultérieur, nous appliquerons le schéma A à un problème de grande taille pour montrer que cette approche peut donner au moins une "bonne" solution de départ à un algorithme convergent.

Dans la prochaine section, nous allons voir l'algorithme de Frank et Wolfe comme une approximation linéaire d'un problème convexe différentiable.

4.1 Discussion sur la convergence de l'algorithme de Frank et Wolfe

Réécrivons de nouveau le problème (2.2):

$$\underset{x\in\Omega}{\text{Min}}\ g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \underset{y\in\Omega}{\text{Max}}\ (Cy, x-y) \quad \text{est convexe sur } \Omega\ . \qquad (4.2)$$

Nous avons des raisons de croire que f(x) est différentiable sur Ω dans la plupart des cas. Supposons qu'il en est ainsi; nous avons vu alors à la fin de la section 3 que $(u_{y_x} - y_x)$ est une direction de descente de g au point x où $y_x = \arg\ g(x)$, $u_{y_x} = \arg \underset{z\in\Omega}{\text{Min}}\ (Cy_x, z)$.

Si l'on applique l'algorithme de Frank et Wolfe au problème (4.2), cela exige le calcul de y_x et d'un pas tout aussi coûteux. Pour remédier à cette situation, nous avons considéré comme approximation de $\nabla g(x) = Cy_x$ l'opérateur Cx. Nous nous sommes servis de cette approximation pour calculer une direction et un nouveau pas. Evidemment, en approximant ainsi le vecteur $\nabla g(x)$, nous avons abouti à l'algorithme de Frank et Wolfe que l'on connaît (LeBlanc *et al.*, 1975; Nguyen, 1976). Or, cette approximation n'est pas toujours valable; il s'agit pour s'en convaincre de référer à différents contre-exemples énoncés plus tôt dans le cas de coûts non-symétriques.

Une heuristique serait de déterminer une meilleure approximation à $\nabla g(x)$ que l'opérateur Cx. Par exemple, on peut considérer l'approximation $C\tilde{y}_x$ où

$$\tilde{y}_x = x + \bar{\theta}(u_x - x)\ ,$$

$$\bar{\theta} = \arg \underset{\theta\in[0,1]}{\text{Min}}\ [(C(x+\theta(u_x-x)),\ x+\theta(u_x-x)-x)]\ ,$$

u_x est un plus court chemin associé à Cx.

On obtient alors l'heuristique suivante:

Etape 0. Soit $x^0 \in \Omega$, $k \leftarrow 0$.

Etape 1. Calculer $\tilde{y}_{x^k}$.

Etape 2. Déterminer un plus court chemin $\bar{u}^k$ associé à $C\tilde{y}_{x^k}$.

Etape 3. Calculer $x^{k+1} = x^k + \lambda^k (\bar{u}^k - x^k)$,

où $\lambda^k = \arg \underset{\lambda \in [0,1]}{\text{Min}} \{(C\tilde{y}_{x(\lambda)}, \bar{u}^k - x^k)\}^2$

$x(\lambda) = x^k + \lambda(\bar{u}^k - x^k)$.

Poser $k \leftarrow k+1$, aller à l'étape 1.

Nous devrons nous contenter d'une approximation sommaire du pas à l'étape 3 car autrement, cela exige beaucoup trop de calculs.

Une autre méthode consiste à utiliser le pas de Polyak [22], c'est-à-dire,

$$\lambda^k = \frac{\gamma_k (C\tilde{y}_{x^k}, x^k - \bar{u}^k)}{\| C\tilde{y}_{x^k} \|^2}$$

nécessite la résolution d'un sous-problème de projection sur l'ensemble Ω à chaque itération. Nous reviendrons sur le sujet dans un rapport ultérieur.

CONCLUSION

En considérant la forme variationnelle de Smith et celle complémentaire, nous avons pu analyser l'approche de direction réalisable pour la recherche d'un flot d'équilibre dans le cas général (symétrique et non-symétrique). Plusieurs variantes de l'algorithme de Frank et Wolfe sont examinées.

Dans bien des cas, il existe des contre-exemples nous assurant de la non-convergence de manière générale. Par contre, ces schémas de calcul nous permettent souvent de mettre en évidence une bonne solution de départ pour un algorithme convergent, ou encore, une analyse plus poussée de ceux-ci nous amène à énoncer plusieurs heuristiques intéressantes.

Il demeure que les résultats obtenus contribuent surtout à la compréhension de notre problème.

RÉFÉRENCES

[1] ZUKHOVITSKII, S.I., POLIAK, R.A. et PRIMAK, M.E. (USSR), Concave Multiperson Games. Numerical Methods. Ekonomika i matimaticheski metody (1971).

[2] FRANK, M. et WOLFE, P. An Algorithm for Quadratic Programming. Nav. Res. Log. Quart. 3 (1956).

[3] MAGNANTI, T.L. Models and Algorithms for Predicting Urban Traffic Equilibria. Présenté au "1st course on Transportation Planning Models", International Center for Transportation Studies, Amalfi 11-16 oct. 1982.

[4] SMITH, M.J. Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria. Transportation Research B 13B, 295-304 (1979).

[5] WARDROP, J.G. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. Proc. Inst. Civil Engineers, Part II, 325-378 (1952).

[6] BECKMANN, M., McGUIRE, C. et WINSTEN, C.B. Studies in Economics of Transportation. Yale University Press, New Haven, Connecticut (1956).

[7] LeBLANC, L.J., MORLOK, E.K., PIERSKALLA, W.P. An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem. Transportation Research 9, 209-318 (1975).

[8] NGUYEN, S. A Unified Approach to Equilibrium Methods of Traffic Assignment, in Traffic Equilibrium Methods, M. Florian, ed., Vol. 118, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin (1976).

[9] FLORIAN, M. An Improved Linear Approximation Algorithm for the Network Equilibrium (Packet Switching) Problem. Publication #57, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal (1977).

[10] SHAIGETZ, M. Amélioration de la convergence de l'algorithme de Frank et Wolfe appliqué au problème d'affectation de trafic avec demandes fixes. Publication #150, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal (1978).

[11] AASHTIANI, H.Z. et MAGNANTI, T.L. Equilibria on a Congested Transportation Network. Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology. To appear in SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods.

[12] FISK, C. et NGUYEN, S. A Unified Approach for the Solution of Network Equilibrium Problems. Publication #169, C.R.T., U. de M. (1980a).

[13] FISK, C. et NGUYEN, S. Solution Algorithms for Network Equilibrium Models with Asymmetric User Costs. Publication #167, C.R.T., Université de Montréal (1980b).

[14] NGUYEN, S. et DUPUIS, C. Une méthode efficace de calcul d'un trafic d'équilibre dans le cas des coûts non-symétriques. Publication #205, C.R.T., U. de M. (1981). A paraitre dans Transportation Science.

[15] DAFERMOS, S. Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. Transportation Science 14, No 1 (1980a).

[16] DAFERMOS, S. Decomposition Algorithms for the General Asymmetric Traffic Equilibrium Problem. Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown University, Providence, R.I. (1980b).

[17] AUSLENDER, A. Optimisation - Méthode numérique. Masson, Paris (1976).

[18] GLOWINSKI, G., LIONS, J.L., TREMOLIERES, R. Analyse numérique des inéquations variationnelles. Méthodes mathématiques de l'informatique. Bordas, Paris, 13-14 (1976).

[19] LUENBERGER, D.G. Introduction to Linear and Nonlinear Programming. Stanford University, Addison-Wesley Publishing Company (1973).

[20] KAPUR, K.C. On Max-Min Problems. Naval Research Logistic Quarterly 20 639-644 (1973).

[21] POWELL, W.B. et SHEFFI, Y. The Convergence of Equilibrium Algorithms with Predetermined Step Sizes. Civil Eng. Dept., M.I.C., Cambridge (1979).

[22] POLYAK, B.T. Convergence of Methods of Feasible directions in extremal Problems. Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. 11, 4, 855-869 (1971).

[23] FISK, C. Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment. Transportation Research B 14B, 3,243-256 (1980).